*La probabilidad es una rama importante de la estadística que se encarga de medir la incertidumbre en los eventos. La probabilidad se utiliza en muchas áreas de la vida, desde la industria hasta la medicina y las finanzas. En este primer tema, se introducirán los conceptos básicos de la probabilidad, incluyendo eventos, resultados y reglas de probabilidad. También se cubrirán los conceptos de independencia y probabilidad condicional, y se discutirá el teorema de Bayes.*

*La probabilidad es una forma de “adivinar” qué puede suceder en una situación. Por ejemplo, cuando lanzas una moneda, es posible que obtengas una cara o una cruz. Pero no sabes exactamente qué sucederá cada vez. La probabilidad es la forma en que puedes estimar qué tan probable es que suceda algo. Puedes decir que es probable que obtengas una cara o una cruz cuando lanzas una moneda, pero nunca puedes estar seguro al 100% de lo que sucederá. Es como hacer una suposición educada o una predicción.*

*1.1 Conceptos básicos: eventos, resultados, y leyes de probabilidad*

*En probabilidad, es importante definir y entender los conceptos de experimento, evento y resultado. A continuación, se definen estos conceptos:*

* *Experimentos: son los procesos que generan resultados inciertos. Un experimento puede ser cualquier situación en la que se realice una observación o medición y los resultados no sean conocidos de antemano. Por ejemplo, lanzar un dado, seleccionar una carta de una baraja, medir la altura de una persona, lanzar una moneda al aire, son ejemplos de experimentos.*
* *Resultados: son los posibles resultados de un experimento. El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se llama “espacio muestral”. Por ejemplo, si lanzas una moneda al aire, el espacio muestral o resultados posibles son cara o cruz. Si se mide la altura de una persona, los resultados posibles son una medida continua en centímetros y el espacio muestral se dice que son los números reales positivos.*
* *Eventos: son subconjuntos de los resultados posibles de un experimento. Un evento puede ser un resultado único o una combinación de resultados. Por ejemplo, en un lanzamiento de un dado, el evento "obtener un número par" consiste en los resultados 2, 4 y 6. En otro ejemplo, si se seleccionan 5 cartas al azar de una baraja, el evento "obtener al menos un as" consiste en los resultados que contienen al menos un as.*

*En cuanto a los eventos conformables dentro de un experimento, debemos considerar los eventos mutuamente excluyentes. Los eventos A y B se consideran mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente. Por ejemplo, al lanzar un dado, el evento A: obtener un número par, y el evento B: obtener un número impar, son mutuamente excluyentes. Otro ejemplo se da cuando lanzamos una moneda al aire, el evento A: obtener cara y el evento B: obtener cruz, son mutuamente excluyentes.*

*Con los eventos se pueden formar diversas operaciones. Entre las principales, para el cálculo de probabilidades se encuentran tres: la unión, la intersección y el complemento. A continuación describiremos cada una de ellas:*

* *Unión: La unión de dos o más eventos A y B se denota como A ∪ B y se define como el evento que ocurre si alguno de los eventos A o B ocurre. En términos de probabilidad, la probabilidad de la unión de dos eventos A y B se calcula como:*

*donde P(A) es la probabilidad de que ocurra el evento A, P(B) es la probabilidad de que ocurra el evento B y es la probabilidad de que ocurran ambos eventos A y B al mismo tiempo. La fórmula tiene en cuenta la probabilidad de la intersección para evitar contar los eventos comunes dos veces.*

* *Intersección: La intersección de dos o más eventos A y B se denota como y se define como el evento que ocurre si ambos eventos A y B ocurren al mismo tiempo. En términos de probabilidad, la probabilidad de la intersección de dos eventos A y B se calcula como:*

*donde es la probabilidad de que ocurra el evento A y es la probabilidad condicional de que ocurra el evento B dado que el evento A ya ha ocurrido.*

* *Complemento: El complemento de un evento A se denota como A' y se define como el evento que no ocurre si el evento A ocurre. En términos de probabilidad, la probabilidad del complemento de un evento A se calcula como:*

*donde P(A) es la probabilidad de que ocurra el evento A.*

*Es importante entender estos conceptos básicos de probabilidad para poder analizar y comprender los eventos y resultados de los experimentos.*

*También es importante conocer los tres axiomas o leyes de la probabilidad. Estos son:*

1. *Primer axioma o ley de la probabilidad:*

*La probabilidad de cualquier evento está siempre entre 0 y 1, inclusive. Es decir, la probabilidad nunca puede ser menor que 0 ni mayor que 1. Por ejemplo, la probabilidad de que salga cara en el lanzamiento de una moneda justa es 0.5.*

1. *Segundo axioma o ley de la probabilidad:*

*La probabilidad de que ocurra un evento que no es posible es igual a 0, mientras que la probabilidad de que ocurra cualquier evento seguro es igual a 1. Por ejemplo, la probabilidad de que salga un número fuera del rango de 1 a 6 en un lanzamiento de un dado justo es 0, mientras que la probabilidad de que salga un número entre 1 y 6 es 1. Comúnmente este segundo axioma se reescribe como: “la probabilidad del espacio muestral es 1”, pues se refiere a que. ya que el espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, la probabilidad de este siempre será 1.*

1. *Tercer axioma o ley de la probabilidad:*

*La probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos en un conjunto de eventos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades de los eventos individuales. Por ejemplo, si lanzamos un dado justo, la probabilidad de que salga un número entre 1 y 6 es 1, ya que estos eventos son mutuamente excluyentes.*

*1.2 Combinatorias: Permutaciones y combinaciones*

*Las combinaciones y permutaciones son formas de contar cosas en matemáticas y en probabilidad. La principal diferencia entre las dos es que en las permutaciones, el orden de los elementos es importante, mientras que en las combinaciones no lo es.*

*Para entenderlo mejor podríamos usar el ejemplo de elegir ropa para vestir. Si tenemos tres camisetas (roja, azul y verde) y dos pantalones (negro y azul), podemos hacer diferentes combinaciones de camisetas y pantalones para vestirnos. Si no nos importa el orden en que elegimos la camiseta y el pantalón, entonces estamos hablando de combinaciones. Pero si queremos elegir la camiseta primero y luego el pantalón en un orden específico, entonces estamos hablando de permutaciones.*

*Una permutación es el número de formas en que se pueden organizar objetos en un orden específico. Por ejemplo, si tenemos tres juguetes: una pelota, un oso de peluche y un coche, podemos organizarlos de seis maneras diferentes: pelota-oso-coche, pelota-coche-oso, oso-pelota-coche, oso-coche-pelota, coche-pelota-oso, coche-oso-pelota. Cada una de estas formas es una permutación de los tres juguetes.*

*Por otro lado, una combinación es el número de formas en que se pueden elegir objetos sin importar el orden en que se eligen. Por ejemplo, si queremos elegir dos juguetes de los mismos tres que mencionamos antes, podemos hacerlo de tres maneras diferentes: pelota y oso, pelota y coche, oso y coche. Cada una de estas formas es una combinación de dos juguetes.*

*Para calcular cuántas permutaciones o combinaciones hay, usamos fórmulas matemáticas específicas que nos dan el número exacto de formas en que podemos hacer la elección.*

*Las combinaciones se calculan utilizando la fórmula:*

*donde "n" es el número total de objetos en el conjunto y "r" es el número de objetos que se están eligiendo para formar una combinación.*

*Por ejemplo, si tenemos un conjunto de 5 cartas y queremos elegir 3 cartas para formar una combinación, el número de combinaciones posibles sería:*

*Esto significa que hay 10 formas diferentes de elegir 3 cartas de un conjunto de 5 cartas.*

*Las permutaciones se calculan utilizando la fórmula:*

*donde "n" es el número total de objetos en el conjunto y "r" es el número de objetos que se están eligiendo para formar una permutación.*

*Por ejemplo, si tenemos un conjunto de 5 cartas y queremos elegir 3 cartas y colocarlas en orden para formar una permutación, el número de permutaciones posibles sería:*

*Esto significa que hay 60 formas diferentes de elegir y ordenar 3 cartas de un conjunto de 5 cartas.*

*En conclusión, las combinaciones y permutaciones son herramientas importantes en el cálculo de probabilidades. Las combinaciones se utilizan cuando el orden de los elementos no importa, mientras que las permutaciones se utilizan cuando el orden sí importa. Ambas fórmulas se basan en el principio fundamental del conteo y pueden ser útiles para calcular la probabilidad de eventos en diversas situaciones. Es importante tener en cuenta que el cálculo de combinaciones y permutaciones puede volverse complicado en situaciones con un gran número de elementos, por lo que es recomendable usar calculadoras o software especializado para realizar los cálculos de manera eficiente.*

*1.3 Probabilidad clásica*

*La probabilidad clásica es un método para calcular la probabilidad de un evento que se basa en la suposición de que todos los resultados posibles del experimento tienen la misma probabilidad de ocurrir y no hay sesgos en el sistema.*

*Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire. La probabilidad de que la moneda caiga con cara o cruz es la misma, ya que no hay nada que haga que la moneda caiga más veces de un lado que del otro. Entonces, si lanzamos la moneda muchas veces, la mayoría de las veces caerá cara y cruz aproximadamente la misma cantidad de veces.*

*La fórmula para calcular la probabilidad clásica de un evento es:*

*Un ejemplo común de cálculo de probabilidad clásica es el lanzamiento de un dado justo de seis caras. En este caso, la probabilidad de que salga un número específico en el dado es 1/6, ya que hay seis posibles resultados igualmente probables: 1, 2, 3, 4, 5, y 6.*

*Si se desea calcular la probabilidad de que salga un número par en el lanzamiento de un dado justo de seis caras, se puede usar el concepto de probabilidad clásica. En este caso, hay tres resultados posibles que cumplen la condición de ser pares: 2, 4 y 6. Por lo tanto, la probabilidad de que salga un número par es 3/6, o 1/2, ya que la mitad de los resultados posibles son números pares.*

*La probabilidad clásica se utiliza en muchas áreas, como juegos de azar, deportes, finanzas y ciencias naturales, por lo cual es importante comprender el concepto y saber utilizarlo. Es importante también el uso de permutaciones y combinaciones para el cálculo de probabilidades. Para ello consideremos el siguiente ejemplo:  
  
Supongamos que tenemos una bolsa con 6 bolas, 3 de color rojo y 3 de color azul. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazo. Para calcular la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color utilizando la probabilidad clásica y las combinaciones, podemos seguir los siguientes pasos:*

1. *Calcular el número de posibles resultados:*

*Podemos extraer dos bolas de la bolsa de 6 en C(6,2) = 15 formas diferentes.*

1. *Calcular el número de resultados favorables:*

*Para obtener dos bolas del mismo color, debemos elegir dos bolas del mismo color de las 3 disponibles en cada caso. Hay 3 formas de elegir dos bolas rojas y 3 formas de elegir dos bolas azules. Por lo tanto, hay 3+3=6 resultados favorables.*

1. *Calcular la probabilidad:*

*La probabilidad de obtener dos bolas del mismo color es el cociente entre el número de resultados favorables y el número total de posibles resultados. Por lo tanto, la probabilidad es de 6/15 = 2/5 = 0.4*

*1.3 Probabilidad condicional*

*La probabilidad condicional es un concepto fundamental en la teoría de la probabilidad que se usa para calcular la probabilidad de un evento, dado que otro evento ya ha ocurrido. A menudo, nos enfrentamos a situaciones en las que conocemos cierta información previa que puede afectar la probabilidad de que ocurra un evento. La probabilidad condicional nos ayuda a calcular la probabilidad de un evento en tales situaciones.*

*Es importante distinguir la diferencia entre la probabilidad condicional y la probabilidad marginal. La probabilidad marginal es la probabilidad de que ocurra un evento sin tener en cuenta ninguna otra información. Por otro lado, la probabilidad condicional es la probabilidad de que ocurra un evento, dado que otro evento ya ha ocurrido.*

*Consideremos la siguiente situación: supongamos que debemos elegir caramelos de diferentes colores de una bolsa. Si la bolsa contiene 10 caramelos verdes y 5 caramelos rojos, la probabilidad de elegir un caramelo rojo es de 5/15. Si ya hemos elegido un caramelo verde y lo hemos retirado de la bolsa, la probabilidad de elegir un caramelo rojo ahora es menor, porque hay menos caramelos en la bolsa. Entonces, la probabilidad de elegir un caramelo rojo dado que ya hemos elegido un caramelo verde es la probabilidad condicional que queremos calcular.*

*La fórmula para la probabilidad condicional es:*

*donde es la probabilidad condicional de A dado B, es la probabilidad de que ambos eventos A y B ocurran y es la probabilidad del evento B.*

*Un ejemplo para entender la probabilidad condicional es el siguiente: supongamos que una urna contiene 5 bolas rojas y 3 bolas verdes. Si elegimos una bola al azar de la urna, la probabilidad de que sea roja es:*

*P(roja) = 5/8*

*Ahora, supongamos que elegimos una bola al azar de la urna y la colocamos a un lado. Si elegimos otra bola al azar de la urna, la probabilidad de que sea roja dada la información de que la primera bola fue roja es:*

*P(roja en el segundo intento | roja en el primer intento) = 4/7*

*Esto se debe a que en el segundo intento quedan 4 bolas rojas y 3 bolas verdes en la urna, y solo una bola roja ha sido elegida y retirada en el primer intento.*

*Veamos otro ejemplo:  
  
Imaginemos que tienes una caja con 5 lápices de colores, 3 de ellos son rojos y 2 son azules. Si deseas sacar al azar un lápiz de la caja y te interesa conocer la probabilidad de que sea rojo dado que es un lápiz largo, estamos hablando de un ejemplo de probabilidad condicional.*

*Para calcular esta probabilidad, primero necesitamos determinar la probabilidad de sacar un lápiz largo de la caja. Supongamos que hay 4 lápices largos en la caja y 1 corto, por lo tanto la probabilidad de sacar un lápiz largo es de 4/5.*

*Ahora necesitamos calcular la probabilidad de que sea un lápiz rojo dado que es largo. Sabemos que hay 3 lápices rojos en total, pero solo 2 de ellos son largos, por lo que la probabilidad de que un lápiz largo sea rojo es de 2/4 (2 lápices rojos largos dividido entre los 4 lápices largos).*

*Usando la fórmula de probabilidad condicional, podemos calcular la probabilidad de que sea rojo dado que es largo como:*

*Por lo tanto, la probabilidad de que un lápiz largo sacado al azar de la caja sea rojo es del 50%.*

*En conclusión, la probabilidad condicional es una herramienta fundamental en la teoría de la probabilidad que permite calcular la probabilidad de un evento dado que otro evento ya ha ocurrido. Se utiliza en diversos campos, desde la toma de decisiones empresariales hasta la planificación de estrategias de juego. Es importante entender la fórmula de probabilidad condicional y cómo aplicarla a diferentes situaciones para poder tomar decisiones informadas y precisas. Además, es esencial tener una comprensión clara de la diferencia entre la probabilidad condicional y la probabilidad marginal para poder interpretar adecuadamente los resultados de los cálculos de probabilidad.*

*1.5 Teorema de Bayes*

*El teorema de Bayes es una herramienta fundamental en el campo de la probabilidad y la estadística. Fue desarrollado por el matemático inglés Thomas Bayes en el siglo XVIII y tiene una gran importancia en la inferencia estadística y el aprendizaje automático. En esencia, el teorema de Bayes es una fórmula que nos permite actualizar nuestras creencias sobre un evento en función de nueva información que se va recibiendo.*

*El teorema de Bayes es una forma de encontrar la respuesta a una pregunta cuando sabes algunas cosas que te pueden ayudar. Imagina que quieres saber si es probable que llueva hoy. Si solo te fijas en el hecho de que hoy es primavera, eso no te da mucha información. Pero si miras el pronóstico del tiempo y ves que hay muchas nubes y viento, entonces sabes más y puedes hacer una mejor predicción. El teorema de Bayes te ayuda a hacer esto en matemáticas. En términos más simples, el teorema de Bayes te ayuda a ajustar tus ideas sobre algo en función de nueva información que recibas.*

*El teorema de Bayes establece que la probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B puede ser calculada mediante la siguiente fórmula:*

*donde P(A) y P(B) son las probabilidades marginales de A y B, respectivamente, y P(B|A) es la probabilidad condicional de B dado A.*

*Comúnmente, el teorema de Bayes se utiliza acompañado del teorema de la probabilidad total. Este teorema establece que si tenemos un conjunto de eventos mutuamente excluyentes, es decir, que cubren todos los posibles resultados y no pueden ocurrir simultáneamente, podemos calcular la probabilidad de un evento utilizando la ley de la probabilidad total.*

*En términos más simples, el teorema de la probabilidad total nos permite calcular la probabilidad de un evento A a partir de la información de otros eventos relacionados con él. La fórmula para calcularlo es la siguiente:*

*Donde P(A) es la probabilidad del evento A, P(Bi) es la probabilidad del evento relacionado Bi y P(A|Bi) es la probabilidad condicional de A dado Bi. Además , es decir, B1, …, Bn cubren todos los eventos posibles.*

*Para entender un poco más sobre el teorema de Bayes veamos el siguiente ejemplo:*

*Supongamos que una farmacia vende dos tipos de pastillas para el dolor de cabeza: pastillas A y pastillas B. La pastilla A es efectiva en el 70% de los casos, mientras que la pastilla B es efectiva en el 90% de los casos. Sin embargo, la pastilla A es mucho más popular y se vende cinco veces más que la pastilla B. Si un cliente compra una pastilla para el dolor de cabeza en la farmacia, ¿cuál es la probabilidad de que la pastilla que compró sea la pastilla A?*

*Solución:*

*Sea A el evento "el cliente compró la pastilla A", y sea B el evento "el cliente compró la pastilla B". Queremos calcular la probabilidad condicional de A dado que el cliente compró una pastilla para el dolor de cabeza. Usando el teorema de Bayes, tenemos:*

*Donde:*

*= 0.7 (ya que la pastilla A es efectiva en el 70% de los casos)*

*(ya que la pastilla A se vende cinco veces más que la pastilla B)*

*Por lo tanto:*

*Por lo tanto, la probabilidad de que la pastilla comprada sea la pastilla A es del 60.98%. Notemos que para obtener la probabilidad de sufrir dolor de cabeza hacemos uso del teorema de la probabilidad total.*

*La importancia del teorema de Bayes radica en su capacidad para actualizar nuestras creencias sobre un evento a medida que obtenemos nueva información. Es utilizado en una amplia gama de aplicaciones, incluyendo el diagnóstico médico, el análisis de riesgos financieros, la detección de fraudes, el reconocimiento de patrones en imágenes y en el procesamiento del lenguaje natural, entre otros. En resumen, el teorema de Bayes es una herramienta poderosa y esencial en la teoría de la probabilidad y su aplicación práctica en el mundo real.*

*Durante este capítulo hemos cubierto los conceptos básicos, incluyendo eventos, resultados, y las reglas de probabilidad, así como las técnicas de permutaciones y combinaciones. Además, hemos discutido la probabilidad clásica y la probabilidad condicional, incluyendo el teorema de Bayes, que es una herramienta poderosa para actualizar la probabilidad a medida que se adquiere nueva información. En conjunto, estos conceptos forman la base para el cálculo y la interpretación de probabilidades en diversos campos, desde la ingeniería hasta la medicina y las ciencias sociales*